



TITLE:

Weierstrassの連続関数の周辺(非線形現象と力学系の理論)

AUTHOR(S):

山口, 昌哉; 畑, 政義

CITATION:

山口, 昌哉 ...[et al]. Weierstrassの連続関数の周辺(非線形現象と力学系の理論). 数理解析研究所講究録 1983, 506: 129-138

ISSUE DATE:

1983-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103744>

RIGHT:

Weierstrass の連続関数の周辺

京大理 山口 昌哉 (Masaya Yamaguti)

京大理 畑 政義 (Masayoshi Hata)

いたるところ微分不可能な連続関数の例として、歴史的に最初に登場したのは、おそらく、次の Weierstrass の関数と呼ばれている Fourier 級数であろう。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Weierstrass は、 b は奇数かつ $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ という条件のもとに、いたるところ有限な微係数を持たないことを示したのであるが、その後 1916 年にはって、G. H. Hardy が、 $ab \geq 1$ という条件さえあれば、いたるところ微分不可能であることを証明した。もし、 $|ab| < 1$ であれば、上の級数を形式的に項別微分した級数が、一様収束することから、 $ab = 1$ というのが、critical な場合にはなっていることがわかる。

さて一方で、単位区間上の一次元力学系；

$$\varphi(x) = 4x(1-x)$$

を考えよう。この写像は、次の写像と位相共役であり、

$$\psi(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

また、絶対連続な不変測度； $d\mu = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ を持つことが知られている。さて φ による n 回 iteration を φ^n と書くことにしよう。あなれち、 $\varphi^n(x) = \varphi(\varphi^{n-1}(x))$, $\varphi^0(x) \equiv x$ とある。このとき、次の事実注目しよう。

$$\varphi^n(x) = \sin^2(2^n \sin^{-1} \sqrt{x}) \quad , x \in [0, 1]$$

すると、この φ^n を用いて上述の Weierstrass 関数、特に $b=2$ の場合が、次の様に書けることがわかる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2^n \pi x) = \frac{1}{1-a} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi^n\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} x\right).$$

さて $a \in (0, 1)$ のとき、級数；

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi^n(x)$$

は、 $a \in [\frac{1}{2}, 1)$ に対して、 x に関して、いたるところで微分不可能であることがわかる。

連続で、いたるところ微分できない関数の他の例として、1903年に、高木貞治が発表した次のものが有名である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi^n(x), \quad x \in [0,1]$$

ここで、 $\psi(x)$ は前述した、区分的に linear な関数である。高木の関数は、2進展開と関連しているが、2進のかわりに10進を用いれば、1928年に van der Waerden が再発見したものとなる。もっと一般に、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \psi^n(x)$$

に関しては、 $a \in [\frac{1}{2}, 1)$ に対して、 x に関していたるところ微分不可能となることが、Faber の結果より従う。

以上の例からわかるように、いたるところ微分できない連続関数のいくつかは、ある一次元力学系を用いた関数の形で表わし得るのである。“微分できない”ということと、“力学系が初期値に関して十分 sensitive であること”とが密接にかかっている様に思われる。

話を一般的にしよう。閉区間 J 上の一次元力学系 φ と、 J 上の関数 g とが与えられたとして、次の二変数関数

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n g(\varphi^n(x))$$

を考えよう。Weierstrass の関数も、高木 の関数も、この特別の場合として含まれている。また、Weierstrass の関数の方は、もっと直接的に $g(x) = \cos \pi x$, $\varphi = \psi$ とし、 t を入れ込むことに注意しておく。特に、 $t=0$ を代入すれば

$$F(0, x) = g(x)$$

であるから、 g のことを初期関数と呼ぶことにしよう。

$F(t, x)$ は次の関数方程式を満足することがわかる。

$$F(t, x) = t F(t, \varphi(x)) + g(x).$$

逆に、この関数方程式の解 $F(t, x)$ は、 φ を用いた母関数で表わされることがわかる。

E を J 上の複素数値有界関数全体の、一様ノルムによる Banach 空間とする。このとき、与えられた J 上の、一次元力学系 φ に対し、次のように、有界線形作用素 T_φ を定めよう。

$$T_\varphi(u) = u(\varphi(x)) \quad , \quad x \in J.$$

これはまた、algebra 上の Birkhoff 作用素とみることができ

3. T_φ の固有値問題;

$$u(\varphi(x)) = \lambda u(x)$$

は、有名な Schröder の関数方程式である。また、 T_φ の dual operator 即ち Perron-Frobenius 作用素である。

簡単な計算から、 T_φ のスペクトル半径は 1 以下であることがわかり、 $\lambda \in \mathbb{C}$ が、2. $|\lambda| > 1$ に對し、 T_φ の resolvent 作用素;

$$(\lambda \text{Id} - T_\varphi)^{-1}$$

が存在する。 $F(t, x)$ に関する先の関数方程式は、この T_φ を用いて書き直せば、

$$F(t, x) = t T_\varphi(F(t, x)) + g(x)$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ が、2.

$$F(t, x) = (\text{Id} - t T_\varphi)^{-1} g(x).$$

すなわち、写像: $g(x) \rightarrow F(t, x)$ は、実は T_φ の resolvent 作用素であるのである。

高木関数族:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \psi^n(x)$$

を考えよう。すでに見ている様は、 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ に対しては x に関していたるところ微分できない関数となる。これに反して、例えば、 $x = \frac{1}{4}$ のときは、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \psi^n(x) = x(1-x).$$

すなわち、 x の整関数となるのである。左せば、三角形のギザギザの重ね合わせであることに注意しておく。さて、 $C[0,1]$ の部分空間 E_0 を次のように定めよう。

$$E_0 = \left\{ f \in C[0,1]; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi^n(x) \right\}$$

すなわち、 ψ, ψ^2, \dots の一次結合で表わされる連続関数全体を E_0 とするのである。このとき、 E_0 は $C[0,1]$ の閉部分空間であり、また次の定理を示すことができる。

定理. $\{c_n\} \in \ell^1$.

この定理において、一次元力学系 ψ の軌道の複雑性が ℓ^1 に反映していることに注意しておく。 E_0 の元 f は、また次の様にも特徴付けられる。

定理. $f \in C[0,1]$ が E_0 に属すること、次の差分方程式系を満足することとは、同値である。

$$\begin{cases} f\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{i}{2^n}\right) + f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) \right\} + C_{n+1} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

ただし, $0 \leq i \leq 2^n - 1$, $n \geq 0$ である。

この差分方程式系は, central difference の値を含んでいないが, 今このところを, parameter $\alpha \in (0, 1)$ を入れた次の様に一般化しよう。

$$\begin{cases} f\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = (1-\alpha) f\left(\frac{i}{2^n}\right) + \alpha f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + C_{n+1} \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \end{cases}$$

特に, $C_n \equiv 0$ の場合を考えよう。

$$\begin{cases} f\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = (1-\alpha) f\left(\frac{i}{2^n}\right) + \alpha f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \end{cases}$$

この場合は, f の連続性を考えると, 次の関数方程式と同値であることがわかる。

$$\begin{cases} f(x) = \alpha f(2x) & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(x) = (1-\alpha) f(2x-1) + \alpha & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

この関数方程式は、確率の問題とからんぐ、De Rham によつて考へられたものである。 w_1, w_2, \dots は次の意味、

i. i. d. random variables とする。

$$P(w_i=0)=\alpha, \quad P(w_i=1)=1-\alpha.$$

このとき、上述の関数方程式の解 $f_\alpha(x)$ は次の確率と一致する。

$$P\left[w=(w_1, w_2, \dots); \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{2^n} < \alpha\right]$$

また De Rham は、 f_α に関する次の性質を示した。すなわち、 f_α は狭義単調増加連続関数で、 $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ならば、 $f'_\alpha(x) \equiv 0$ a.e. すなわち、 f_α は Lebesgue の特異関数である。また α を、 $|\alpha| < 1$ かつ $|1-\alpha| < 1$ なる複素数とすることによつて、De Rham の解は、複素平面上のフラフラ曲線を与えるようである。特に、 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ としたものは、P. Lévy によつて調べられたものであり、 α を α とおきかえれば、Koch 曲線や、Polya 曲線が得られる。

さて、 f_α に関する差分方程式系：

$$\begin{cases} f_\alpha\left(\frac{2^{i+1}}{2^{m+1}}\right) = (1-\alpha)f_\alpha\left(\frac{i}{2^n}\right) + \alpha f_\alpha\left(\frac{i+1}{2^n}\right) \\ f_\alpha(0)=0, \quad f_\alpha(1)=1 \end{cases}$$

を α に関して偏微分して得よう。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{\alpha} \left(\frac{2^{i+1}}{2^{n+1}} \right) &= -f_{\alpha} \left(\frac{i}{2^n} \right) + (1-\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{\alpha} \left(\frac{i}{2^n} \right) \\ &\quad + f_{\alpha} \left(\frac{i+1}{2^n} \right) + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{\alpha} \left(\frac{i+1}{2^n} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{\alpha}(0) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{\alpha}(1) = 0 \end{aligned} \right.$$

ここで, $f_{\frac{1}{2}}(x) \equiv x$ であることを用いる。簡単のため。

$$F(x) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f_{\alpha}(x) \right|_{\alpha=\frac{1}{2}}$$

とすれば,

$$\left\{ \begin{aligned} F\left(\frac{2^{i+1}}{2^{n+1}}\right) &= \frac{1}{2} \left\{ F\left(\frac{i}{2^n}\right) + F\left(\frac{i+1}{2^n}\right) \right\} + \frac{1}{2^n} \\ F(0) &= F(1) = 0 \end{aligned} \right.$$

また, $F \in E_0$ であり,

$$F(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi^n(x).$$

ゆえに, F は, 高次の関数であることがわかった。

[参考文献]

- [1] M. Yamaguti and M. Hata ; Weierstrass's Function and Chaos. to appear in Hokkaido Math. J.
- [2] M. Hata and M. Yamaguti ; On Takagi's nowhere differentiable function. to appear